~o~o~o~o~o

Διάλεξη 10η

14-11-2019

- Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεία.

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ καλείται κρίσιμο σημείο της f αν-ν $df_{P_0} = 0 \Leftrightarrow f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_z(P_0) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{grad} f(P_0) = 0$

Ⓐ*

Θεώρημα: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεία και $a \in f(U)$. Αν το σύνολο $f^{-1}(a)$ **ΔΕΝ** περιέχει κανένα κρίσιμο σημείο της f, τότε είναι κανονική επιφάνεια.

π.χ

① $S^2(R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$

Ορίζω την συν/ση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$

Έχω $S^2(R) = f^{-1}(0)$

Αναζητώ τα κρίσιμα σημεία της f, λύνοντας το σύστημα $f_x = f_y = f_z = 0 \Leftrightarrow 2x = 2y = 2z = 0$

Μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0,0) \notin f^{-1}(0)$

$\Rightarrow S^2(R)$ είναι κανονική επιφάνεια.

Απόδ θεωρήματος (*Α):

Θεωρώ $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$. Λόγω υπόθεσης $(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)) \neq (0,0,0)$

Υποθέτω ότι $f_z(P_0) \neq 0$. Ορίζω $F: U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (x, y, f(x,y,z))$

Ο Ιακωβιανός πίνακας της F στο P_0 είναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(P_0) & f_y(P_0) & f_z(P_0) \end{bmatrix}$$

(**) Σύμφωνα με το θεώρημα αντ. απεικόνισης υπάρχουν ανοιχτή περιοχή U_0 του P_0 και W_0 του $F(P_0)$ τ.ω: $F|_{U_0}: U_0 \to W_0$ είναι 1-1, επί και η αντίστροφη είναι και λεία.

$\det dF_{P_0} = f_z(P_0) \neq 0$

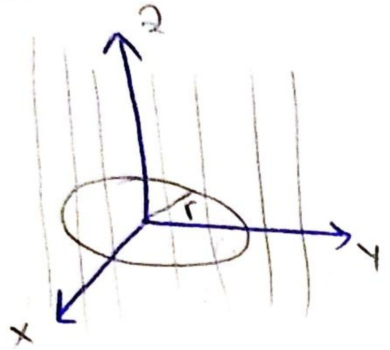
$F(x,y,z) = (u,v,t) \overset{\text{θεώρημα (**) αντιστροφής}}{\Longleftrightarrow} (x,y,z) = G(u,v,t)$, $G = F^{-1}|_{U_0}$

$F(x,y,z) = (u,v,t) \Leftrightarrow (x, y, f(x,y,z)) = (u,v,t) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = y \\ t = f(x,y,z). \end{cases}$$

Για $(x,y,z) \in U_0 \cap f^{-1}(a)$: $(x,y,z) = (u, v, g(u,v,a))$

Π.χ



$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=r^2\}$

$S = f^{-1}(0)$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$f(x,y,z)=x^2+y^2-r^2$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι:

$f_x=f_y=f_z=0 \iff 2x=2y=0.$

Το σύνολο των κρίσιμων σημείων είναι: $\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$. Κανένα από αυτά δεν ανήκει στο $f^{-1}(0)$. Άρα το S είναι κανονική επιφάνεια.

• Να βρεθεί σύστημα συντεταγμένων:

$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1 \Rightarrow \frac{x}{r}=\cos u$ και $\frac{y}{r}=\sin u$, $z=u$

Ορίζω την απεικόνιση: $X: U\subset\mathbb{R}^2 \to V\cap S$ τ.ω

$X(u,v)=(r\cos u, r\sin u, v)$, $(u,v)\in U$.

• $(u,v)\in \underbrace{(0,2\pi)}_{\text{ανοιχτό}} \times\mathbb{R} = U$

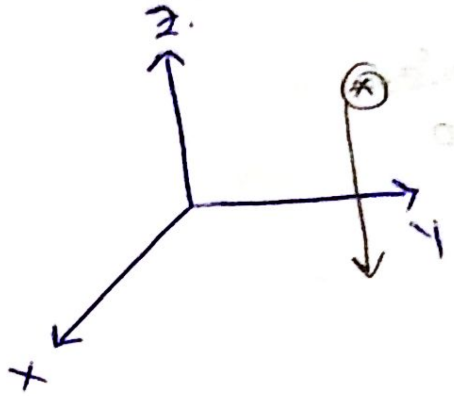
ανοιχτό διότι το U πρέπει να είναι ανοιχτό.

• $V=\mathbb{R}^3\setminus \ell$.

Εύκολα ελέγχω ότι $X_u\times X_v\neq 0$.

Πρόταση: Έστω S κανονική επιφάνεια. Υποθέτω ότι $x: U \to V \cap S$ είναι λεία, 1-1 και $x_u \times x_v \neq 0$ στο U. Τότε η x είναι ομοιομορφισμός και επομένως είναι σύστημα συντεταγμένων.

Απόδ.



$$x(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$$x_u \times x_v = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

Είναι $q_0 = (u_0, v_0) \in U$ ώστε

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$$

(*) προβολή στο επίπεδο Oxy: $\pi_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \equiv Oxy$

$\pi_1(x,y,z) = (x,y,0) = (x,y)$

$\pi_1 \circ x: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, λεία

$\pi_1 \circ x(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. Επειδή $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q_0) \neq 0$, υπάρχει περιοχή U_0 του q_0 λεία περιοχή W_0 του $\pi_1 \circ x(q_0)$ ώστε η

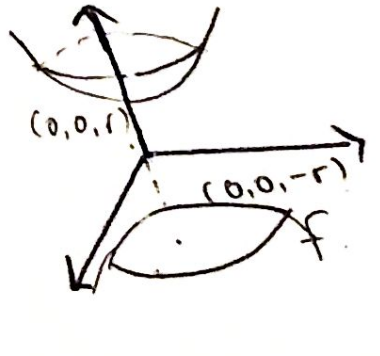
$U_0 \in U$ και περιοχή W_0 του $\pi_1 \circ x(q_0)$ ώστε η $(\pi_1 \circ x)|_{U_0}: U_0 \subseteq U \to W_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι διαφορίσιμη. Επιπλέον 1-1, ότι και η αντιστροφή είναι διαφορ.

Δηλαδή $\left((\pi_1 \circ x|_U)\right)^{-1} \circ \pi_1 \circ x|_U = Id \Rightarrow$

$$(\pi_1 \circ x|_U)^{-1} \circ \pi_1 = x|_{U_0}^{-1}$$

π.χ.

Δίνεται το σύνολο $\Sigma_r = \{(x,y,z) \mid -x^2 - y^2 + z^2 = r^2\}$, $r > 0$. Θεωρώ την συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 + z^2 - r^2$. Τότε $\Sigma_r = f^{-1}(0)$. Αναζητώ κρίσιμο σημείο της $f_x = f_y = f_z = 0 \Leftrightarrow$



$-2x = -2y = 2z = 0$. Το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0,0) \notin f^{-1}(0)$. Άρα Σ_r είναι κανονική επιφάνεια.

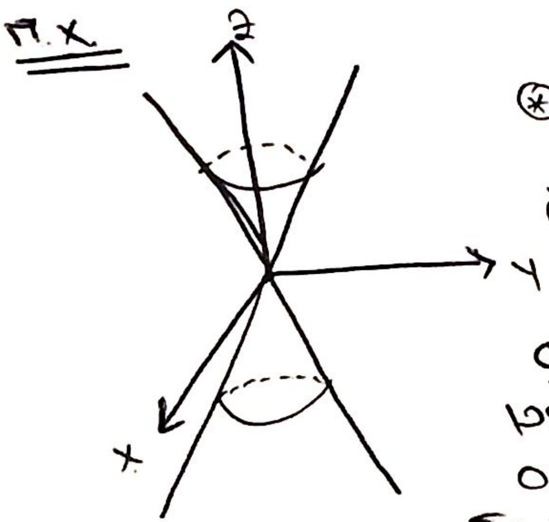
Τροχιακή συνεκτικότητα:

Ορισμός: Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται τροχιακά συνεκτικό αν $\forall p,q \in A$ υπάρχει συνεχής καμπύλη $c:[0,1] \to A$, $c(0)=p$, $c(1)=q$.

Θεώρημα: Τροχιακή συνεκτικότητα $\Rightarrow$ συνεκτικότητα.

Πρόταση: Έστω S κανονική επιφάνεια. Η είναι συνεκτική $\Rightarrow$ είναι τροχιακά συνεκτική.

π.χ.



$$\Sigma = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=z^2\}$$

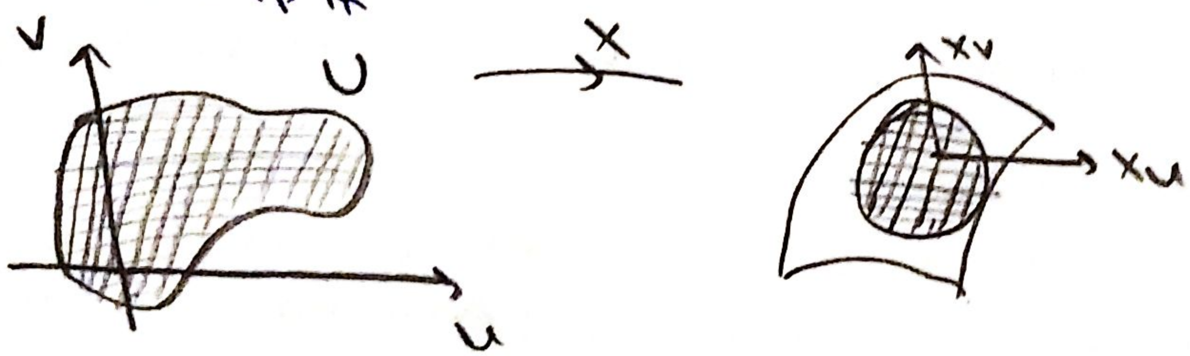
(*) Η προβολή δεν είναι ποτέ 1-1 σε κανένα από τα Oxy, Oxz κ.τ.λ. Για τον λόγο αυτόν η επιφάνεια δεν είναι κανονική και ούτε γράφημα.

Ωστόσο αν "κόψαμε" το κάτω μέρος προκύπτει $z=\sqrt{x^2+y^2}$ το οποίο είναι γράφημα αλλά δεν είναι λεία στο $(0,0)$ άρα ούτε κανονική. Εάν σβήναμε και το $(0,0)$ τότε θα ήταν.

Εφαπτόμενα διανύσματα - εφαπτ. επίπεδο κανονικής επιφ:

Ορισμός: Έστω S κανονική επιφάνεια και $p \in S$. Ένα διάνυσμα $w \in T_p\mathbb{R}^3$ καλείται εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο σημείο p αν-ν υπάρχει λεία καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $\varepsilon > 0$ τ.ω $c(0) = p$, $c'(0) = w$.

Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων της S στο σημείο p συμβολίζεται με T_pS και $T_pS \subset T_p\mathbb{R}^2$.



$X(u, v=v_0)$ · παραμ. καμπ. $u=u_0$

$X(u=u_0, v)$ » » $u=u_0$

X_u, X_v είναι εφαπτ. διανύσματα.

Πρόταση: Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντ/νων της S με $p = X(q) \in X(U)$. Τότε ισχύει $T_pS = dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$

Συνέπεια: Το σύνολο T_pS είναι διαν. υπόχωρος του $T_p\mathbb{R}^3$ διάστασης 2.

Απόδ.

Αποδ

$w \in T_pS \Rightarrow \exists\, c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p$, $c'(0) = w$

Μπορώ να υποθέσω για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$ ότι

$c(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq x(U)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\Rightarrow$ (*) $c(t) = x(u(t), v(t)) = x \circ B(t)$, $B : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$

$B(t) = (u(t), v(t))$

$c(0) = p \Leftrightarrow x(B(0)) = x(q) \Leftrightarrow B(0) = q \Leftrightarrow (u(0), v(0)) = q$

$$w = c'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_0 x(u(t), v(t)) = u'(0)\, x_u(u(0), v(0)) +$$

$$u'(0) \cdot x_v(u(0), v(0)) \Rightarrow w = u'(0)\, x_u(q) + v'(0)\, x_v(q) \Leftrightarrow$$

$w = u'(0)\, dx_q(e_1) + v'(0)\, dx_q(e_2) \Rightarrow$

$w = dx_q\,(u'(de_1) + v'(de_2)) = dx_q(B'(0))$

Άρα ισχύει ότι $T_pS \subseteq dx_q(T_q\mathbb{R}^2)$. Αντίστροφα έστω $w \in$

$w \in dx_q(T_q\mathbb{R}^2)$. $w = dx_q(w_0)$, $w_0 \in T_q\mathbb{R}^2$.

Θεωρώ καμπύλη $B : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ ώστε $B(0) = q$, $B'(0) = w_0$

$w = dx_q(w_0) = dx_q(B'(0)) = (x_0 B)'(0)$

Θέτω $c = x_0 B : (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$, $c(0) = x(B(0)) = x(q) = p$

$w' = c'(0) \Rightarrow w \in \underbrace{T_pS}$

είναι 2-διάστατος υπόχωρος του $T_p\mathbb{R}^3$.

Θα καλείται εφαπτόμενο επίπεδο //.

Βάση εφαπτόμενου επιπέδου:

$c_1(u) = x(u, v_0)$ $\qquad q = (u_0, v_0)$

$c_1'(u_0) = x_u(u_0, v_0) \in T_pS$, $\quad p = x(q)$

$c_2(v) = (u_0, v)$

$c_2'(v) = x_v(u_0, v_0) \in T_pS$

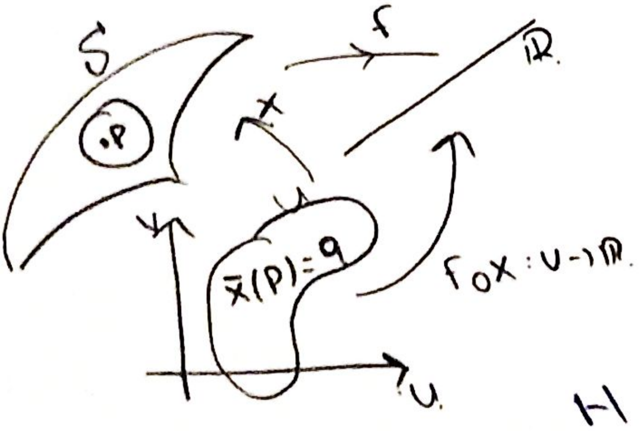
Για να αποτελούν τα x_u, x_v βάση θα πρέπει να είναι γραμμ. ανεξάρτητα, που αυτό είναι. Δηλαδή αν παίρνουμε ένα σύστημα συντεταγμένων το $\{x_u(u,v), x_v(u,v)\}$ τότε αυτό αποτελεί βάση του T_pS στο $p = x(u,v)$.

(*) απόδ. σελ. (7): Έχω ότι: $c(t) = x(u(t), v(t))$

(κανόνας αλυσίδας) $\quad w = c'(0) = u'(0)\, x_u(u(0), v(0)) + v'(0)\, x_v(u(0), v(0))$

$$\Rightarrow \boxed{w = u'(0)\, x_u(q) + v'(0)\, x_v(q)}$$

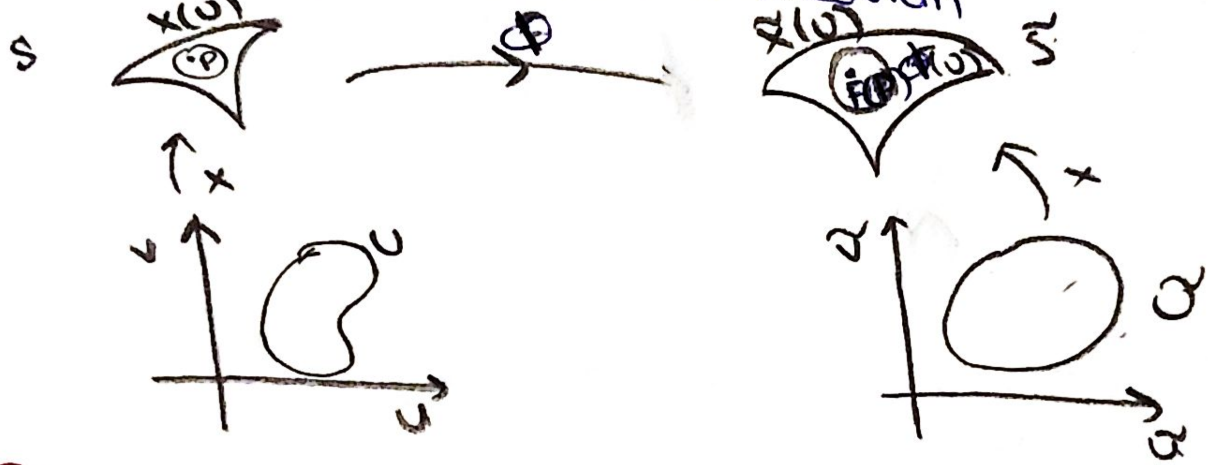
Ορισμός: Έστω S κανονική επιφάνεια και $f: S \to \mathbb{R}$. Η f καλείται διαφορίσιμη στο $p \in S$ αν-ν για σύστημα συν/νων $x: U \to x(U) \subset S$ με $p \in x(U)$ η συνάρτηση $f \circ x: U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορ. στο $x^{-1}(p)$.



Η f καλείται διαφορίσιμη αν-ν η f είναι διαφορ. $\forall p \in S$.

Διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ κανονικών επιφ.

Ορισμός: Έστω $S, \tilde{S}$ κανονικές επιφάνειες και $\Phi : S \to \tilde{S}$ συνεχής απεικόνιση



(i) Η Φ καλείται διαφορίσιμη στο $p \in S$ αν για συστήματα συντεταγμένων: $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$
και $\tilde{x} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \tilde{S}$ με $p \in x(U), \Phi(p) \in \tilde{x}(\tilde{U})$
και $\Phi(x(U)) \subset \tilde{x}(\tilde{U})$ η απεικόνιση $\tilde{x}^{-1} \circ A \circ x \, U \subset \mathbb{R}^2 \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$
είναι διαφορίσιμη στο $x^{-1}(p)$.

$x_1 : U_1 \to S \quad , \quad \tilde{x}_1 : \tilde{U}_1 \to \tilde{S}$

$$\tilde{x}_1^{-1} \circ \Phi \circ x_1 = (\tilde{x}_1 \circ \tilde{x}) \circ (\tilde{x}^{-1} \circ \Phi \circ x) \circ (x^{-1} \circ x)$$